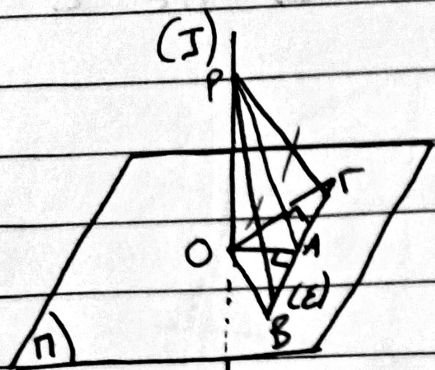


6/3/1+

Θεώρημα 3 καθέτων



Ευθεία (ε) περιέχεται στο
επίπεδο (π) χωρίς να
διέρχεται από το σημείο της
Ο ευθεία (ζ) με το (π)

i) $(ζ) \perp (π)$, $OA \perp (ε) \Rightarrow PA \perp (ε)$

ii) $(ζ) \perp (π)$, $PA \perp (ε) \Rightarrow OA \perp (ε)$

iii) $OA \perp (ε)$, $AP \perp (ε)$ και $OP \perp OA \Rightarrow$

$OP \perp π$

Απόδειξη (i)

Θεωρώ επί της (ε) σημεία Β, Γ ώστε $AB = AG$

Στο $\triangle OBG$ η ΟΑ είναι διαμ και ύψος. Άρα το $\triangle OBG$

είναι ισοσκελές, δηλ $OB = OG$

Συγκρίνω τα $\triangle OPB$ και $\triangle OPG$.

Έχουν $OP = OP$ (κοινή), $OB = OG$ και $\angle POB = \angle POG = 1^\circ$ (διότι $(ζ) \perp π$)

~~$\triangle PBF$ είναι~~

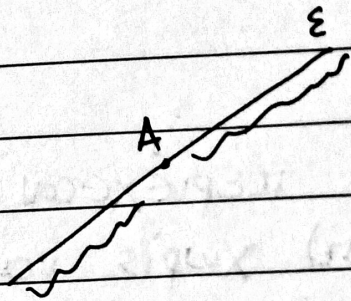
Συγκρίνω $\triangle PBO = \triangle PGO \Rightarrow PB = PG$

$\Rightarrow \triangle PBG$ είναι ισοσκελές και ΡΑ είναι διάμεσος $\Rightarrow$

ΡΑ ύψος δηλαδή $PA \perp (ε)$

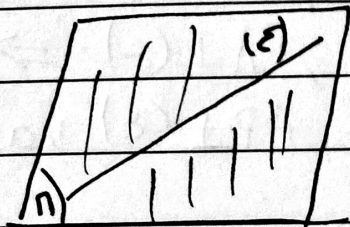
Συνέπειες αξιωματικῆς διατάξεως

i)



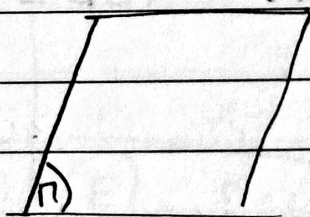
Κάθε σημείο A της (ε) χωρίζει την (ε) σε 2 ημιεπίπεδα.

ii)



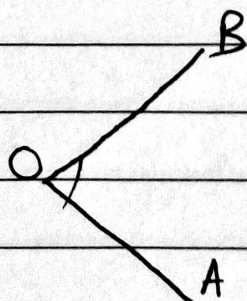
Έστω επίπεδο (π) και ευθεία (ε) που περιέχεται στο (π) τότε η (ε) χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα με αμμή την (ε)

iii) Κάθε επίπεδο (π) χωρίζει τον χώρο σε 2 ημιχώρους με αμμή το επίπεδο (π)



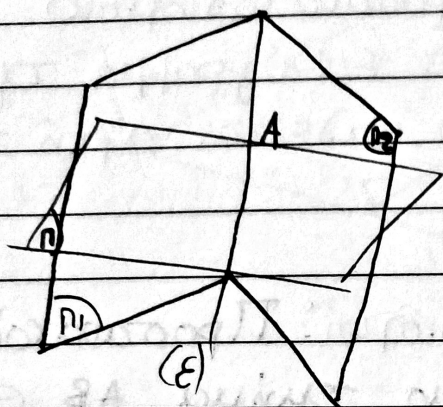
Γωνίες:

$\hat{A} \hat{O} B$



Διέδρες Γωνίες

Μια διεδρική γωνία είναι τομή ημιχώρων δύο τεμνόμενων επιπέδων Σ κατά διεδρική γωνία αντιστοιχεί μια επίπεδη γωνία.



Έστω σημείο A της τομής των επιπέδων $(\Pi_1), (\Pi_2)$. Θεωρώ επίπεδο $(\Pi) \perp (Ε)$ στο σημείο A . Το (Π) τέμνει τα $(\Pi_1), (\Pi_2)$ σε ημιευθείες λ_x, λ_y . Η επίπεδη

γωνία $\chi \hat{A} \psi$ καλείται αντιστοίχη επίπεδη της διεδρικής γωνίας με έδρες $(\Pi_1), (\Pi_2)$ και ακμή $(Ε)$. Η $\chi \hat{A} \psi$ είναι κατά ορισμένη, δηλ ανεξάρτητη της επιλογής των σημείων.

Κάθετα επίπεδα

Ορισμός: Δύο τεμνόμενα επίπεδα καλούνται κάθετα αν-ν η αντιστοίχη επίπεδη μιας από τις 4 διέδρες γωνίες που ορίζονται είναι ορθή.

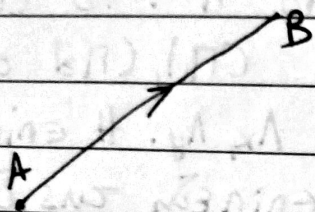
Μια διεδρική καλείται ορθή αν η αντιστοίχη επίπεδη είναι ορθή.

Διανύσματα

Προσανατολισμένα ευθύγ. τμήματα ή
(εφαρμοστά διανύσματα)

Ορισμός: Καλούμαι προσανατολισμένο
ευθύγραμμο τμήμα κάθε ευθύγραμμο τμήμα
του οποίου το ένα άκρο καλείται αρχή του
και το άλλο πέρας του.

Συμβολισμοί: Προσανατολισμένο
ευθύγραμμο τμήμα AB είναι το
ευθ. τμήμα AB όπου το A
θεωρείται αρχή του και το B πέρας.



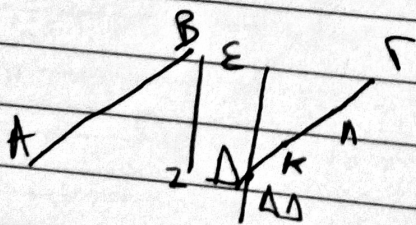
Κάθε διάνυσμα έχει 3 χαρακτηριστικά

· Διεύθυνση



Φορέας: Ενός προσανατολισμένου ευθύ. τμήματος
είναι μία ευθεία στην οποία περιέχεται

Ορισμός: Δύο προσ. ευθ. τμήματα λέμε ότι
έχουν την ίδια διεύθυνση αν βρίσκονται
στον ίδιο φορέα ή σε παράλληλους φορείς.



Τα προσ. ευθ. τμήματα
 AB και $ΓΔ$ έχουν
την ίδια διεύθυνση
 $ΕΖ$ όχι ίδια διεύθυνση
κλ ίδια με $AB, ΓΔ$
με το $Δ.Δ$

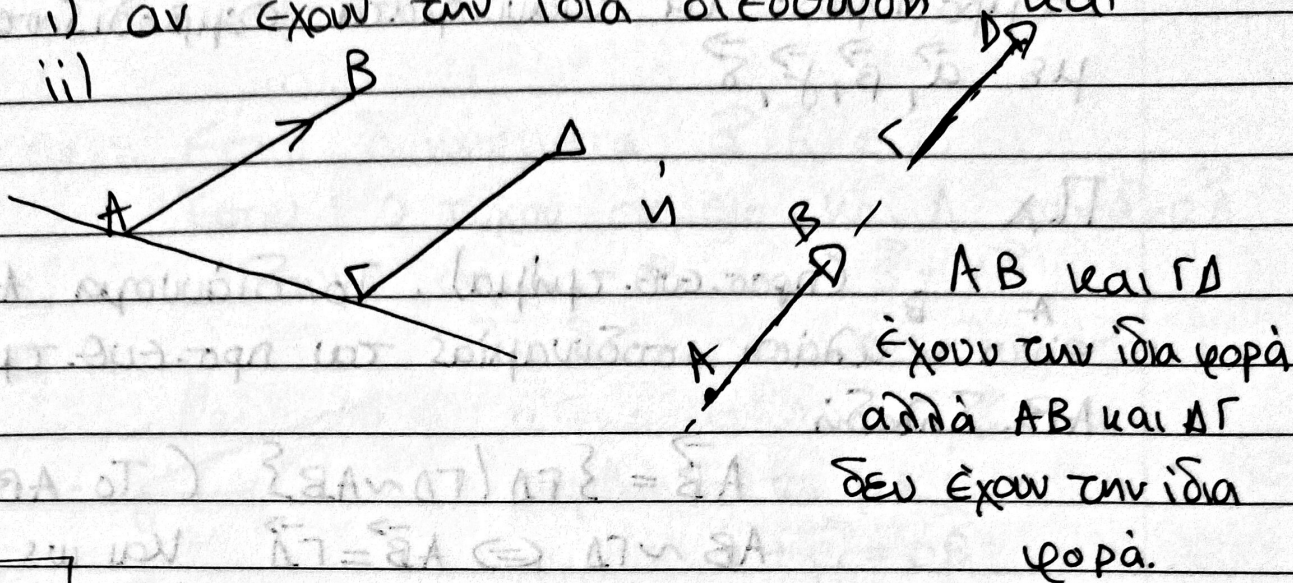
Το $ΕΖ$ έχει ίδια διεύθυνση

Φορά εφαρμοστού διανύσματος

Ορισμός: Δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα λέμε ότι έχουν την ίδια φορά:

αν-ν. i) αν έχουν την ίδια διεύθυνση και

iii)



Μήκος

Διανύσματα α (δεν έχουν θέση στο χώρο)
(σκέτα όχι εφαρμοστά)

Ορισμός: Δύο προσ. ευθ. τμήματα (ή εφαρμοστά διαν.) καλούνται ισοδύναμα αν-ν. έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μήκη.

Ορίζεται μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των προσ. ευθ. τμημάτων

i) $AB \sim \Gamma\Delta \Leftrightarrow$ τα $AB, \Gamma\Delta$ έχουν την διεύθυνση, ίδια φορά και $|AB| = |\Gamma\Delta|$ μήκος

Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, δηλ. $AB \sim AB$ (ανακλαστική)
ίδια διεύ, φορά, μήκος

ii) $AB \sim \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta \sim AB$ (συμμετρία)

iii) $AB \sim \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta \sim \epsilon\zeta \Rightarrow AB \sim \epsilon\zeta$ (μεταβατική)

Ορισμός: Οι κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την $\sim$ καλούνται διανύσματα

Συμβολισμός: Τα διανύσματα συμβολίζονται με $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

Π.χ

 (προς. ευθ. τμήμα). Το διάνυσμα $\vec{AB}$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του προς. ευθ. τμήματος AB . Δηλαδή

$$\vec{AB} = \{ \Gamma\Delta \mid \Gamma\Delta \sim AB \} \quad (\text{Το } AB \text{ αναφέρεται } AB \sim \Gamma\Delta \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta} \text{ και ως απεικόνιση του } \vec{AB})$$

$\rightarrow$ Η διεύθυνση, η φορά και το μήκος ενός διανύματος $\vec{a} = \vec{AB}$ είναι εξ' ορισμού η διεύθυνση, το μήκος και η φορά του τυχόντος αντιπροσώπου του

Συμπέρασμα: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow$ έχουν την ίδια φορά, διεύθυνση και ίσα μήκη.
 $|\vec{a}| =$ μήκος του $\vec{a}$ ή $\|\vec{a}\|$

Μηδενικό διάνυσμα: $\vec{0} = \vec{AA} = \vec{BB}$

Σημαντική παρατήρηση: $|\vec{a}| \geq 0$, $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Πράξεις στο σύνολο D των διανυσμάτων του χώρου

- Πρόσθεση διανυσμάτων
- Βαθμωτός πολλαπλασιασμός

Πρόσθεση: Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$

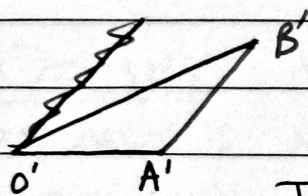
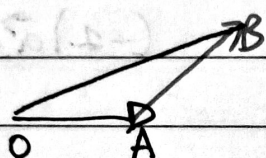
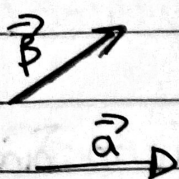
Έστω O τυχόν σημείο και A και $\vec{\alpha} = \vec{OA}$

Θεωρώ σημείο B και $\vec{\beta} = \vec{AB}$

Το διάνυσμα $\vec{OB}$ λέγεται

άθροισμα των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ και συμβολίζεται με

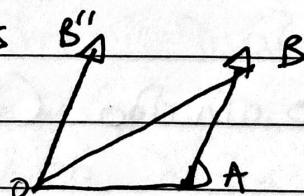
$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OB}$$



ισα $O'A'B'$ OAB

Τα μήκη είναι ίσα (ίσα τρίγωνα) και φορά, διεύθ.

ή δεύτερος ορισμός



κανόνας παραλληλογράμμου

Πρόσθεση είναι η απεικόνιση $+: D \times D \rightarrow D$

$$(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \mapsto \vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

Βαθμωτός πολ/μος: Δίνεται αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\alpha} \in D$ καθότι βαθμωτό γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ το διάνυσμα $\lambda\vec{\alpha}$ που ορίζεται ως εξής:

i) $\|\lambda\vec{\alpha}\| = |\lambda| \|\vec{\alpha}\|$

ii) Το $\lambda\vec{\alpha}$ έχει την ίδια διεύθυνση με το $\vec{\alpha}$

iii) Το $\lambda\vec{\alpha}$ έχει την ίδια φορά με το $\vec{\alpha}$

$\lambda \neq 0$ αν $\lambda > 0$ είναι διαφορετική φορά αν $\lambda < 0$

Αν $\lambda = 0$ $\|\lambda\vec{\alpha}\| = |0| \|\vec{\alpha}\| = 0 \Rightarrow \lambda\vec{\alpha} = \vec{0}$ $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Ο βαθμωτός πολ/μος είναι η απεικόνιση: $\mathbb{R} \times D \rightarrow D$
 $(\lambda, \vec{a}) \rightarrow \lambda \vec{a}$

Ιδιότητες πρόσθεσης και βαθμωτά πολ/μώ

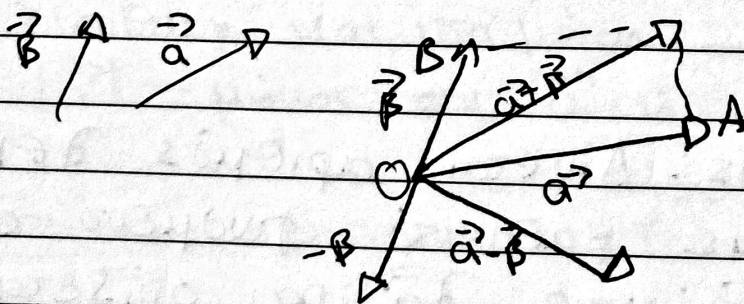
Πρόταση Τα ακόλουθα ισχύουν

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
- 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$ (αντίθετο του $\vec{a}$ είναι το διάνυσμα $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$)
- 5) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
- 6) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$
- 7) $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$
- 8) $1\vec{a} = \vec{a}$

Πρόταση: Το σύνολο $(D, +, \cdot)$ είναι διανυσματικός χώρος

$$n\vec{a} = \vec{a} + \dots + \vec{a} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

- $\lambda(\vec{a} - \vec{b}) = \lambda\vec{a} - \lambda\vec{b}$
- $(\lambda - \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} - \mu\vec{a}$
- $\lambda\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{a} = \vec{0}$

Γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k$$

Γραμμικά ανεξάρτητα Γραμμική εξάρτηση

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται γραμμικά ανεξάρτητα αν-ν ισχύει:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \text{ (Γ.Α.)}$$

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ καλούνται γραμμικά εξαρτημένα (Γ.Ε) αν-ν Δευ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ισοδύναμα υπάρχει αριθμός $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ώστε $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$ και $|\lambda_1| + \dots + |\lambda_k| > 0$ (Ένα τουλάχιστον από τα λ_i είναι $\neq 0$)

Πρόταση: i) Αν $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{k+1}$ είναι γρ. ανεξ. τότε $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι Γ.Α.

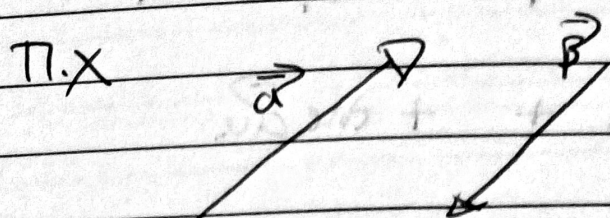
ii) Αν $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ είναι Γ.Ε, τότε $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k, \vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_l$ είναι Γ.Ε για κάθε $\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_l$

$$\vec{0} \text{ είναι Γ.Ε} \quad 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \text{ Γ.Α} \Leftrightarrow \vec{a} \neq \vec{0}$$

→ Ερώτημα: Πότε 2, 3, 4 διανύσματα είναι Γ.Ε ή (Γ.Α)

Ορισμός: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ καλούνται
συγγραμμικά αν-ν έχουν την ίδια διεύθυνση



Πρόταση: Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι Γ.Ε
αν-ν είναι συγγραμμικά

Απόδειξη:

i) Έστω $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι Γ.Ε $\Rightarrow \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε
 $\lambda \vec{a} + \mu \vec{\beta} = \vec{0}$, $|\lambda| + |\mu| > 0$

$$\text{αν } \lambda \neq 0 \quad \lambda \vec{a} = -\mu \vec{\beta} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} (\lambda \vec{a}) = \frac{1}{\lambda} (-\mu \vec{\beta}) \Rightarrow \left(\frac{1 \cdot \lambda}{\lambda} \right) \vec{a} =$$
$$= \left(-\frac{\mu}{\lambda} \vec{\beta} \right) \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a}, \vec{\beta} \text{ έχουν την}$$

ίδια διεύθυνση δηλ είναι συγγραμμικά

ii) Αντίστροφα, έστω ότι τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά
Αν $\vec{a} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι Γ.Ε

· Έστω $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}, \quad \vec{\beta}_0 = \frac{1}{|\vec{\beta}|} \cdot \vec{\beta}$$

$$|\vec{a}_0| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \right| = \left| \frac{1}{|\vec{a}|} \right| |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1$$

$$\text{Έχουμε } |\vec{a}_0| = |\vec{\beta}_0| = 1$$

Τα διανύσματα $\vec{a}_0, \vec{b}_0$ έχουν την ίδια
διεύθυνση και $|\vec{a}_0| = 1 = |\vec{b}_0|$ (ίδιο μήκος) τότε
έχουν την ίδια φορά ή αντίθ. φορά.

Αν έχουν ίδια φορά θα είναι ίσα $\vec{a}_0 = \vec{b}_0$

Αν έχουν αντίθετη φορά θα είναι αντίθετα $\vec{a}_0 = -\vec{b}_0$

Γ.Ε. α

$$\vec{a}_0 = \vec{b}_0 \Leftrightarrow \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \cdot \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} + \left(-\frac{1}{|\vec{b}|} \right) \vec{b} = 0$$

$$\vec{a}_0 = -\vec{b}_0 \quad \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} \Leftrightarrow \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b} = 0 \quad \text{Γ.Ε.}$$